第４講　ベクトル，数列

1

［1］　次の ☐ に適する式または数値を求めよ．

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=\dfrac{3}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n-2}{2a_n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められているとする．

このとき，$b_n=\dfrac{1}{a_n-1}$ とおくと，$b_{n+1}-b_n=$ ☐ である．これを用いて，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると，$a_n=$ ☐ である．

次に，数列 $\{c_n\}$ を $c_1=1$，$c_{n+1}=c_n+4b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定めると，一般項は $c_n=$ ☐ である．数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，S_n を因数分解した式で表すと ☐ であり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{k}{S_k}=$ ☐ である．

［2］　次の空欄に当てはまる数を答えよ．

(1)　$1+2+3+\cdots\cdots+n=1770$ となる自然数 n は $n=$ **アイ** である．

(2)　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=204$ となる自然数 n は $n=$ **ウ** である．

(3)　$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots\cdots+(2n)^2=6895$ となる自然数 n は $n=$ **エオ** である．

2　$0<p<1$ を満たす定数 p に対して，△ABC の辺 AB を $p:1-p$ に内分する点を D とする．また，D から直線 AC に下ろした垂線と直線 AC の交点を E，線分 DE を $p:1-p$ に内分する点を F とし，$\mathrm{DE}=d$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$，$p$ を用いて表せ．

(2)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{CF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ を p，d を用いて表せ．

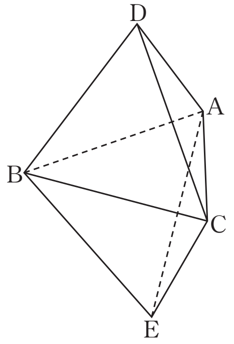
(3)　$g=\overrightarrow{\mathrm{CF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ とする．g を p，d を用いて表せ．

(4)　直線 BE と直線 CF が垂直に交わるとき，直線 AB と直線 CD も垂直に交わることを示せ．

3

右図は，一辺の長さが１の正四面体 DABC と EACB を合わせてできる多面体である．

$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{DB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ とおくとき，次の空欄に当てはまる数を答えよ．



$\overrightarrow{DE}=\frac{\square}{\square}\vec{a}+\frac{\square}{\square}\vec{b}+\frac{\square}{\square}\vec{c}$ である．

辺 BE を $1:2$ に内分する点を P とすると，

$\overrightarrow{DP}=\frac{\square}{\square}\vec{a}+\frac{\square}{\square}\vec{b}+\frac{\square}{\square}\vec{c}$

である．また，辺 AC を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点 Q が $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{AD}$ を満たすとすると，$t=\frac{\square}{\square}$ であって，四面体 PABQ の体積は $\frac{\sqrt{\square}}{\square\square}$ である．

第4講　ベクトル，数列

1 [1] $b_n=\dfrac{1}{a_n-1}$ のとき

$$b_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{\dfrac{3a_n-2}{2a_n-1}-1}=\frac{2a_n-1}{a_n-1}=2+\frac{1}{a_n-1}=b_n+2$$

$b_{n+1}-b_n=2$ より，数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=\dfrac{1}{a_1-1}=2$，公差 2 の等差数列

よって，$b_n=2+(n-1)\cdot 2=2n$ より $\dfrac{1}{a_n-1}=2n$　　よって $a_n=\dfrac{1}{2n}+1$

$c_{n+1}-c_n=4b_n=8n$ より，$n\geqq 2$ のとき

$c_n=c_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}8k=1+8\cdot\frac{1}{2}(n-1)n=4n^2-4n+1$（$n=1$ のときも成立）

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+1\cdot n$$

$$=\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{k}{S_k}=\sum_{k=1}^{10}\frac{3}{(2k+1)(2k-1)}=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)$$

$$=\frac{30}{21}=\frac{10}{7}$$

[2] (1) $1+2+3+\cdots\cdots+n=1770$ より $\dfrac{1}{2}n(n+1)=1770$　　$n(n+1)=3540$

$59\cdot 60=3540$ であり，n が自然数のとき $n(n+1)$ は単調増加.
よって $n=59$ に限られる.

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=204$ より

$\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=204$　　$n(n+1)(2n+1)=1224$

$8\cdot 9\cdot 17=1224$ であり，n が自然数のとき $n(n+1)(2n+1)$ は単調増加.
よって，$n=8$ に限られる.

(3) $S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ とおくと，$n\geqq 2$ のとき

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots\cdots+(2n)^2$$
$$=S_{2n}-S_{n-1}$$
$$=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{n\{(16n^2+12n+2)-(2n^2-3n+1)\}}{6}$$
$$=\frac{n(14n^2+15n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(14n+1)}{6}$$（$n=1$ のときも成立）

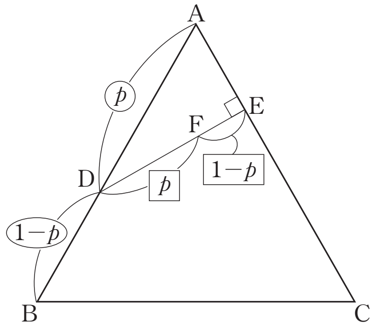
$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots\cdots+(2n)^2=6895$ より

$\dfrac{n(n+1)(14n+1)}{6}=6895 \qquad n(n+1)(14n+1)=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot197$

$14\cdot15\cdot197=6895$ であり，n が自然数のとき $n(n+1)(14n+1)$ は単調増加.

よって，$n=14$ に限られる.

2 (1) $\overrightarrow{CF}=(1-p)\overrightarrow{CD}+p\overrightarrow{CE}$



(2) $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{DE}=\{\overrightarrow{CE}+(1-p)\overrightarrow{ED}\}\cdot\overrightarrow{DE}$

$=\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DE}-(1-p)|\overrightarrow{DE}|^2$

$=0-(1-p)d^2=-(1-p)d^2$

(3) $g=\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DB}$

$=(\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DB}$

$=p\overrightarrow{DE}\cdot\left(-\dfrac{1-p}{p}\overrightarrow{DA}\right)$

$=-(1-p)\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DA}=-(1-p)\overrightarrow{DE}\cdot(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA})$

$=-(1-p)(|\overrightarrow{DE}|^2+\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{EA})=-(1-p)(d^2+0)=-(1-p)d^2$

(4) $\mathrm{BE}\perp\mathrm{CF}$ より $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CF}=0$

$(\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DB})\cdot\overrightarrow{CF}=0$

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CF}=0$

$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{DE}$

よって，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{1-p}\overrightarrow{DB}\cdot(\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FD})$

$=\dfrac{1}{1-p}(\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{FD})$

$=\dfrac{1}{1-p}(\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DB})$

(2), (3)より $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DB}=-(1-p)d^2$

したがって，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ より $\mathrm{AB}\perp\mathrm{CD}$

3 合同な正四面体 DABC と正四面体 EACB において，点 D から面 ABC に下ろした垂線の足と点 E から △ABC に下ろした垂線の足は，ともに正三角形 ABC の重心で一致する.

この重心を G とすると

$\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DG}=2\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DC}\right)=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{DP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DE}=\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}\right)=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{8}{9}\vec{b}+\dfrac{2}{9}\vec{c}$

$\overrightarrow{DQ}=(1-t)\overrightarrow{DA}+t\overrightarrow{DC}=(1-t)\vec{a}+t\vec{c}$

$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{AD}$ より $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AD}=0$

$(\overrightarrow{DQ}-\overrightarrow{DP})\cdot\vec{a}=0$

$\overrightarrow{DQ}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{DP}\cdot\vec{a}$

$$\{(1-t)\vec{a}+t\vec{c}\}\cdot\vec{a}=\left(\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{8}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}\right)\cdot\vec{a}$$

$$(1-t)|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{2}{9}|\vec{a}|^2+\frac{8}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{a}\cdot\vec{c}$$

$|\vec{a}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$ より

$1-\dfrac{1}{2}t=\dfrac{7}{9}$　　よって $t=\dfrac{4}{9}$

このとき AQ：QC＝4：5

四面体 EABC の高さを h とすると

$$h^2=|\overrightarrow{\mathrm{EG}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{DG}}|^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a})$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1^2+1^2+1^2+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\times6$$　　よって $h=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

したがって，四面体 PABQ の体積を V とすると

$$V=\triangle\mathrm{ABQ}\times(\text{点 P から }\triangle\mathrm{ABQ}\text{ に下ろした垂線の長さ})\times\frac{1}{3}$$

$$=\left(\frac{4}{9}\triangle\mathrm{ABC}\right)\times\frac{1}{3}h\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin60^\circ\times\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{81}$$